RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 maggio 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica terrestre — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota I del Socio Carlo Somigliana [1].

Per la valutazione della massa di un ghiacciaio è necessario conoscerne lo spessore; il quale può essere determinato direttamente mediante trapanazioni, come qualche volta fu fatto. Ma operazioni di questo genere sono così laboriose e, specialmente ora, costose che possono considerarsi come praticamente ineffettuabili, in particolar modo nella misura che sarebbe indispensabile per un rilievo completo del fondo.

Si è quindi pensato se non fosse possibile arrivare alla conoscenza dello spessore, o della profondità, di un ghiacciaio indirettamente, mediante qualche altro elemento più accessibile alle misure. Si è trovato questo elemento nella velocità superficiale. I varî strati di ghiaccio scorrono, per effetto della gravità, gli uni sopra gli altri, in modo che le velocità relative si sommano ed all'ingrosso può dirsi che la velocità risulta così massima in superficie, minima al fondo. Non si può però ammettere, come fa il signor W. Werenskiold [2], che la velocità superficiale in un punto dipenda esclusivamente dalla profondità in quel punto, cosicchè questi due elementi si possano senz'altro dedurre l'uno dall'altro.

[1] Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

[2] W. Werenskiold, *Die Tiefe eines Gletscher,* Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. IX, 1915.

La quistione va posta in modo più largo, cercando di collegare la velocità superficiale di tutti i punti di una sezione del ghiacciaio, colla curva del profilo della sezione.

È questo il problema che, per la prima volta, porremo e che è suscettibile di una soluzione perfetta e assai semplice. Cosicchè — almeno nei limiti di validità della nostra teoria — *è possibile un vero rilievo del profilo di una sezione di un ghiacciaio mediante la conoscenza esclusiva della velocità superficiale dei punti della sezione stessa.*

I.

Le equazioni del moto.

Un tale risultato presuppone naturalmente una teoria del moto di un ghiacciaio. Noi adotteremo l'ipotesi, ormai generalmente accettata, di considerare il moto del ghiacciaio come quello di un fluido vischioso pesante,

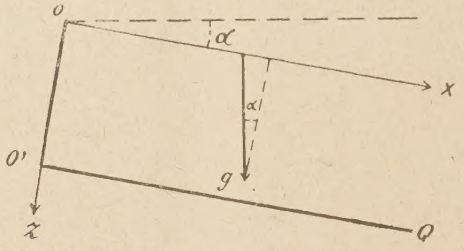

Fig. 1.

la cui compressibilità è trascurabile. Supporremo che il moto avvenga in un canale cilindrico di sezione qualsiasi; la superficie libera del ghiaccio supporremo piana e con inclinazione uguale a quella del canale.

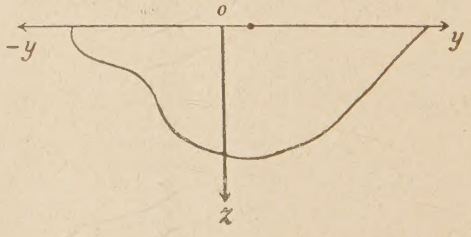

Fig. 2.

Scegliamo per origine un punto della superficie libera, per asse delle x una parallela alla direzione del canale, per asse delle y una normale che determinerà la sezione che vogliamo considerare. Sia α l'angolo d'inclinazione del canale sull'orizzonte; l'asse delle z avrà parimenti un'inclinazione α sulla verticale (fig. 1). La linea del fondo sarà una parallela ad Ox, indicata da $O'Q$. La sezione sarà una curva del piano yz, limitata superiormente da una porzione dell'asse delle y (fig. 2).

Indichiamo con u, v, w le componenti della velocità in un punto (x, y, z) ed osserviamo che nel movimento di un ghiacciaio le accelerazioni sono di un ordine di grandezza trascurabile rispetto alle velocità.

Supposto inoltre il movimento stazionario, le equazioni del moto sono [1]

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_2 u = X \qquad \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta_2 v = Y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_2 w = Z$$

ove X, Y, Z sono le componenti delle forze unitarie di massa, p la pressione idrostatica, μ il coefficiente di attrito. Per l'incompressibilità poi dovrà essere

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Se g è l'accelerazione di gravità, ϱ la densità del ghiaccio, nel nostro caso avremo

$$X = \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad Y = 0 \qquad Z = \varrho g \cos \alpha .$$

È naturale poi di supporre nulla la componente trasversale della velocità, cioè $v = 0$. Avremo così

$$\text{(1)} \qquad \begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_2 u = \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_2 w = \varrho g \cos \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \end{gathered}$$

Dovendo limitare le nostre considerazioni ad una porzione assai breve del canale, le variazioni del moto nella direzione del canale saranno assai piccole, e potremo quindi supporre

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ,$$

Per l'ultima delle (1) dovrà essere anche $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$; ed avremo così

$$\text{(3)} \qquad u = u(y, z) \qquad w = w(y) .$$

Dalle (1) risulta allora che p deve essere lineare rispetto ad x ed a z; cioè

$$\text{(4)} \qquad p = Ax + Bz + C$$

con A, B, C costanti. Le equazioni (1) si riducono allora alle due equazioni

$$\mu \Delta_2 u = A - \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} (B - \varrho g \cos \alpha) .$$

[1] V. Kirchhoff, *Meccanica*, Lez. XXVI, § 3.

Consideriamo ora le equazioni che devono essere soddisfatte alla superficie. Dalle formole generali per le componenti di tensione (v. Kirchhoff, loc. cit.) si ha nel nostro caso

$$X_x = Y_y = Z_z = p$$

$$Y_z = -\mu \frac{\partial w}{\partial y} \qquad Z_x = -\mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad X_y = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Se n è la normale interna al contorno della sezione, si ha su questo contorno $\cos(n\,x) = 0$ e quindi per le componenti della pressione superficiale P

$$X_n = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos(n\,y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n\,z) \right) = -\mu \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$Y_n = p \cos(n\,y) - \mu \frac{\partial w}{\partial y} \cos(n\,z)$$

$$Z_n = p \cos(n\,z) - \mu \frac{\partial w}{\partial y} \cos(n\,y).$$

Se P_n è la componente di P secondo la normale, si ha

$$P_n = p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial y} \cos(n\,y) \cos(n\,z)$$

e se S è il vettore-spostamento superficiale, si deve avere vettorialmente, indicando ν il coefficiente d'attrito superficiale,

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_n = -\nu \mathbf{S}$$

ossia

$$X_n - P_n \cos(n\,x) = -\nu\,u$$
$$Y_n - P_n \cos(n\,y) = -\nu\,v$$
$$Z_n - P_n \cos(n\,z) = -\nu\,w.$$

Queste equazioni nel caso nostro divengono

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} = \nu\,u \quad , \quad (1 - 2\cos^2(n\,y)) \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\mu \cos(n\,y)\,(1 - 2\cos^2(n\,z)) \frac{\partial w}{\partial y} = \nu\,w.$$

Alle ultime due non si può soddisfare che supponendo $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e quindi $w = 0$ in tutto il campo. Dalle (1) segue allora

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho\,g \cos\alpha = B$$

e resta l'unica equazione al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nu u$$

la quale, per la superficie libera, vale a dire sull'asse delle y, poichè ivi l'attrito coll'ambiente esterno si può supporre nullo, diviene

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{per } z = 0.$$

Sulla rimanente parte del contorno, se ν fosse grandissimo, si avrebbe

$$u = 0.$$

Ora effettivamente per quanto risulta dalle osservazioni la velocità di moto a contatto col terreno risulta estremamente piccola, almeno nei casi di non eccessiva inclinazione. Il prof. Mercanton calcola pel ghiacciaio del Rodano uno spostamento annuo sul fondo di poco più di 4 metri all'anno, vale a dire poco più di un centimetro al giorno (1). Possiamo pertanto ritenere trascurabili, o almeno dello stesso ordine di grandezza degli errori di osservazione, questi spostamenti rispetto a quelli superficiali, che possono raggiungere anche 50 centimetri al giorno, nei nostri ghiacciai. Volendo tenerne conto si potrebbe aggiungere alla componente u una costante, supponendo il moto uguale lungo tutto il profilo della sezione. I risultati finali però subirebbero modificazioni insensibili.

Noi possiamo anche supporre che la pressione varii pochissimo nella direzione del movimento, almeno in prossimità della sezione che dobbiamo considerare e quindi si abbia nella (4) $A = 0$. La pressione si riduce alla pressione idrostatica dovuta alla gravità

$$p = z \varrho g \cos \alpha + p_0$$

ove p_0 indica la pressione atmosferica. *Delle equazioni del moto resta quindi soltanto la prima*

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \varrho g \operatorname{sen} \alpha = 0 \tag{5}$$

mentre le equazioni al contorno sono

$$\begin{array}{ll} \textit{per } z = 0 & \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \textit{sul fondo} & u = 0. \end{array} \tag{6}$$

(1) Commission des Glaciers de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. *Mensuration au Glacier du Rhône 1874-1915.* § 11, pag. 169.

Sono queste le equazioni sulle quali in ultima analisi dobbiamo basare le nostre considerazioni.

La equazione (5) non differisce dall'equazione che determina il movimento di un fluido vischioso pesante in tubo capillare inclinato. Questo risultato, che può sembrare a prima vista paradossale, è giustificato dal fatto che la velocità del ghiacciaio è sempre inferiore alla *velocità critica*, oltre la quale avvengono quei modi turbolenti, che rendono inapplicabile la teoria del movimento continuo dei fluidi (1).

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota V del Corrispondente Francesco Severi.

9. Al variare delle costanti $c_1, \ldots, c_q$ la curva C, costruita nella nota IV (2), varia in un sistema continuo $\{C\}$. La generica curva di questo sistema, in quanto si assegnino colla loro molteplicità effettiva i suoi punti multipli, che eventualmente coincidano coi punti base del fascio $y = \text{cost.}$, definisce un sistema lineare $\infty^0 |C|$. E invero, per valori generici delle $c_1, \ldots, c_q$ il gruppo dei p (o dei $p - \delta'$) punti mediante cui fu definita C, *non* sta in una serie lineare infinita d'ordine p (o $p - \delta'$). Il sistema continuo $\{C\}$ consta pertanto di ∞^q sistemi lineari distinti (il generico di questi sistemi essendo ∞^0).

D'altronde, come risulta immediatamente dal concetto di serie caratteristica di un sistema continuo (Severi, Atti R. Acc. Scienze Torino, 1904), ogni tal sistema di curve tracciate su F, non può constare di più che ∞^q sistemi lineari distinti; dunque « ogni sistema continuo completo di curve algebriche tracciate su F non può contenere più che ∞^q sistemi lineari distinti, e vi sono su F sistemi continui per cui il massimo è raggiunto ». Donde poi si deduce agevolmente (Severi, Atti Ist. Veneto, 1906) che « su F ogni sistema lineare, irriducibile o no, di caratteri virtuali (grado e genere) n, π e d'indice di specialità i, per cui sia $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, appartiene ad una serie ∞^q di sistemi lineari distinti; ed anzi ogni siffatta serie, come totalità di sistemi lineari, è *individuata* da una qualunque delle sue curve »; ecc. ecc.

Tenendo infine conto del teorema di Castelnuovo, circa il massimo della deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve tracciate su F, ne segue senz'altro che:

(1) V. Boris Weinberg, *Ueber den Koefficienten der inneren Reibung des Gletschereises und seine Bedeutung für die Theorie der Gletscherbewegung.* Zeitschrift für Gletscherkunde, I Bd., 1906.

(2) Questi Rendiconti, pag. 276.

Un sistema continuo completo, tracciato su F, *la cui curva generica sia irriducibile e soddisfaccia coi suoi caratteri* n, π, i *alla diseguaglianza* $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, *ha la serie caratteristica completa.*

È questo, come si sa, un importante teorema dovuto ad Enriques, il quale lo ha dato direttamente, prescindendo dalla diseguaglianza supposta sopra (1).

Dal teorema ultimamente enunciato si deduce, come facemmo per vie diverse, Castelnuovo ed io, che il numero degli integrali semplici di 1ª specie di F non è inferiore a q, donde poi, combinando coi risultati ch'io aveva in precedenza conseguiti, traemmo la conclusione che *il numero degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad* F *è* q *e che* $2q$ *è il numero*

(1) A tale diseguaglianza si può sostituire l'ipotesi che il sistema continuo $\{C\}$ consti di ∞^q sistemi lineari. Col nostro procedimento la validità del teorema concernente la completezza della serie caratteristica d'un sistema completo resta pertanto dubbia solo nel caso in cui $\{C\}$ consti di $\infty^{q'}$ sistemi lineari ($0 \leq q' < q$). Sistemi continui siffatti possono esistere (per $q' > 0$) soltanto quando F possegga sistemi regolari d'integrali riducibili; il che non accade in generale. Questo ho creduto opportuno d'avvertire innanzi d'accennare ad un punto del procedimento geometrico con cui si dimostra la completezza della serie caratteristica, che abbisogna di qualche ulteriore indagine, la quale potrà eventualmente portare a limitazioni inessenziali, lasciando però integra la sostanza del fatto. A un certo punto del ricordato procedimento si ha da considerare, sopra un piano α, un sistema continuo completo Σ di curve C, d'ordine m, la cui generica C_0 è dotata di d nodi $P_i (i = 1, \ldots, d)$ e tocca in λ punti $Q_j (j = 1, \ldots, \lambda)$ una curva (irriducibile) K. Ogni curva di Σ infinitamente vicina a C_0 passa per P_i, Q_j e *viceversa* — si dice — ogni curva d'ordine m, infinitamente vicina a C_0, passante per P_i, Q_j, ha d nodi infinitamente vicini a quelli di C_0 e λ contatti con K infinitamente vicini ai Q_j. Ora il « viceversa » non è senz'altro lecito. Prendiamo infatti le curve d'ordine m di α come « punti » di un S_N lineare $\left(N = \frac{m(m+3)}{2}\right)$. Le ∞^{N-1} curve prossime a C_0, che hanno un nodo prossimo a P_i, formano allora una « falda lineare » F_i di S_N (ved. le mie citate *Vorlesungen*, pag. 314). Similmente si ha una falda lineare Φ_j costituita dalle ∞^{N-1} curve prossime a C_0 e tangenti a K in un punto dell'intorno di Q_j. L'iperpiano H_i (o I_j) tangente ad F_i (o Φ_j) nel « punto origine » C_0, è l'imagine delle ∞^{N-1} curve d'ordine m che passano per P_i (o per Q_j). Le curve d'ordine m, prossime a C_0, dotate di d nodi e λ-tangenti a K (che son poi tutte le curve di Σ prossime a C_0) son quelle comuni alle $d + \lambda$ falde F_i, Φ_j. Esse costituiscono una falda V, di origine C_0, che è pure lineare, perchè C_0, come punto generico di Σ, è semplice. Lo spazio lineare tangente a V — cioè a Σ — in C_0 è contenuto nello spazio H comune ai suddetti $d + \lambda$ iperpiani; ma — *ed è qui il punto essenziale* — non è detto che i due spazi coincidano. Non può insomma escludersi che la dimensione di Σ sia inferiore a quella del sistema lineare H delle aggiunte d'ordine m a C_0, passanti pei λ punti Q_j. Se Σ è di dimensione inferiore a quella di H, la serie caratteristica di Σ non è completa. Nè ad escluder ciò giova avvertire che C_0 è un punto semplice di Σ, perchè le $d + \lambda$ falde F_i, Φ_j potrebbero benissimo toccarsi lungo tutta la V, senza che C_0 cessasse d'esser semplice. Quel che si può affermare è che la dimensione di Σ eguaglia certo quella di H, quando i λ punti Q_j impongono condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine m a C_0; cioè quando la serie caratteristica di Σ è non speciale.

degl'integrali semplici di 2ª specie ed il numero dei periodi degli uni e degli altri.

10. Passerò ora a considerare i legami fra la teoria degli'integrali semplici di 1ª specie, i criterî di equivalenza per le curve tracciate sulla superficie F e la teoria della base relativa alla totalità di queste curve.

Richiamo anzitutto la forma più utile di quel teorema che ho dato altra volta sotto il nome di *teorema d'Abel sulle superficie* (Annali di Mat., 1905):

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo di « curve algebriche C, tracciate sulla superficie F, sia contenuto totalmente « in un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale sem- « plice di 1ª specie di F, nei punti comuni a C e ad una curva irriduci- « bile A, fissata entro un fascio lineare, resti costante al variare con- « tinuo di C ».

In particolare come curva A può assumersi la sezione della superficie F $[f(x, y, z) = 0]$ con un generico piano $y =$ cost.

La ragione intima del fatto che basta la costanza delle somme fornite nel gruppo variabile (C, A) dagl'integrali semplici di 1ª specie di F, per affermare la variabilità di C in un sistema lineare, è questa: che le somme dei p integrali abeliani di 1ª specie appartenenti ad A, nei punti del gruppo (C, A), riduconsi a q linearmente indipendenti. Ciò è stato già notato da Castelnuovo, profittando del fatto che quelle p somme son integrali semplici di 1ª specie delle varietà di Picard annessa ad F.

Gioverà precisare maggiormente questo fatto, provando che di quelle p somme le $p - q$ inerenti agl'integrali abeliani di 1ª specie individuati su A delle curve del sistema aggiunto $|A'|$, son costanti (mentre le q somme date dagl'integrali di 1ª specie di F sono in generale indipendenti fra di loro). A questo scopo poniamo in modo generico:

$$u = \int \frac{\varphi(x, y, z)}{f'_z}\, dx, \tag{24}$$

ove $\varphi = 0$ sia una superficie d'ordine $m - 2$ aggiunta ad F e passante per la retta impropria r dei piani $y =$ cost.; e indichiamo con $x_1(x_1, y, z_1)$, ..., $x_n(x_n, y, z_n)$ gli n punti d'incontro di una curva C d'ordine n, tracciata su F, col piano $y =$ cost.

Fissiamo inoltre, per un determinato valor iniziale y_0 di y, cui corrispondano i punti $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ di C, i *cammini d'integrazione iniziali* $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$ lungo cui si calcolano i valori $u(x_1^{(0)}), \ldots, u(x_n^{(0)})$ dell'integrale u, a partire da un'origine comune dei detti cammini, che sceglieremo in uno, P, dei punti base del fascio $y =$ cost.

Variando y, a partire da y_0, variano con continuità i punti di diramazione della riemanniana $f(x, y, z) = 0$ (su cui si distende la funzione z di x,

riguardando y come un parametro) e vengono così definiti per continuità, a partire dai cammini iniziali, i cammini d'integrazione $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ su ciascuna sezione $y = \text{cost.}$ Resterà pertanto definito, per ogni y, il valore della somma $U(y) = u(x_1) + \cdots + u(x_n)$, il quale dipenderà, in generale, oltrechè dai cammini $\sigma^{(0)}$, che si sono scelti come iniziali, anche dal cammino con cui, sul piano ove si distende la variabile complessa y, si va da y_0 al valore considerato di y. *Vediamo in che cosa consista la polidromia della funzione* $U(y)$. È a priori ben chiaro che U aumenta di un periodo di u, quando y circola; ma pel seguito ci occorre d'indagare più davvicino quali sono i valori di y attorno ai quali si produce la polidromia e come questa si produca.

Una circolazione di y, da y_0 ritornando ivi, fa ritornare in sè ogni cammino σ (o meglio lo trasforma in un cammino omologo all'iniziale) semprechè il ciclo descritto da y non contenga nel suo interno nessuno dei valori singolari, come $y = b$. Pertanto, poichè u non diviene mai identicamente infinito, comunque varî y (n. 6), U risulta funzione olomorfa di y nell'intorno di ogni valore non singolare.

In verità, se $y = \beta$ è uno dei piani $y = \text{cost.}$ tangenti a C, girando attorno a β si scambiano *due* dei punti $x_1, \ldots, x_n$, p. es. x_1, x_2, e si scambiano pure i cammini σ_1, σ_2. Ciò però non produce alcuna alterazione sul valore di U. Infatti, attesa la genericità degli assi coordinati, β si può supporre diverso da un valore singolare e i due punti x_1, x_2, all'inizio della circolazione di y attorno a β, possono ritenersi vicinissimi, sicchè insomma i cammini σ_1, σ_2 risultano omologhi all'inizio e quindi anche alla fine della circolazione, la quale perciò non produce che uno scambio nei primi due termini di U. Dunque U è olomorfa nell'intorno di β.

Resta da esaminare che cosa accade attorno ad un valore singolare $y = b$, relativo al punto di contatto (a, b, c) del piano tangente $y = b$. Sieno ξ_1, ξ_2 i due punti di diramazione della riemanniana $f(x, y, z) = 0$, i quali, col tendere di y a b, tendono a fondersi nel punto (a, b, c) (che diventa un punto di combaciamento di due fogli). Si avvertirà, anzitutto, che i punti ξ_1, ξ_2 connettono i medesimi due fogli della riemanniana $f(x, y, z) = 0$, perchè appunto al limite, sovrapponendosi, devono dar luogo ad un punto doppio di $f(x, b, z) = 0$. Ciò posto, se uno dei cammini d'integrazione, p. es. σ_i, incontra la linea di passaggio $\xi_1 \xi_2$, dopo la circolazione di y attorno a b, esso si muta in un cammino omologo a $\sigma_i + \tau$, ove τ è il ciclo (nullo, sulla riemanniana a 4 dimensioni imagine della superficie F), che circonda la predetta linea di passaggio. Invece i cammini σ che non incontrano tale linea di passaggio si mutano in cammini omologhi, per una circolazione di y attorno a b.

Dunque la variazione di U dipende soltanto degli eventuali cammini incontranti la linea di passaggio $\xi_1 \xi_2$. Comunque, poichè il ciclo τ, sulla

riemanniana a 2 dimensioni $f(x, y, z) = 0$, è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei $2p$ cicli fondamentali, così in definitiva, per effetto della circolazione attorno a b, la U si altererà per un periodo $\Sigma m_i \omega_i$ di u, ove $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$ sono i $2p$ periodi fondamentali dell'integrale u. Si avvertirà che *gl'interi m dipendono soltanto dalla scelta dei cammini iniziali* $\sigma^{(0)}$ *e dalla natura della circolazione che si è fatta compiere ad y.*

Osservazione 1ª. — Se l'integrale u possiede un valore critico $y = \alpha$, cosicchè risulti $\varphi \equiv (y - \alpha)\psi$, $\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$, per $y = \alpha$ la somma U si annulla identicamente. In particolare ciò accade per $y = \infty$, quando φ, anzichè esser un'aggiunta d'ordine $m - 2$ passante per r, sia un'aggiunta d'ordine $m - 3$.

Osservazione 2ª. — Come abbiamo detto, *la* U *è funzione olomorfa di y attorno ad ogni valore non singolare.* È facile vedere ch'*essa presenta una singolarità di tipo logaritmico in un valore singolare* $y = b$. Invero, perchè in $y = b$ si abbia una singolarità di U occorre (ma neppure basta), che uno almeno dei cammini σ_i, quando si gira attorno a b, si muti in un cammino omologo a $\sigma_i + \tau$. Detto allora $u(x_i)$ il valore di u lungo il cammino σ_i e $\omega_i(y)$ il periodo di u lungo τ, verrà nell'intorno di $y = b$:

$$u(x_i) = \eta_i(y) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega(y)\log(y - b),$$

ove $\eta_i(y)$, $\omega(y)$ son funzioni olomorfe di y attorno ad $y = b$. Se sono λ (λ intero $\leq n$) i cicli σ_i per cui accade questo fatto, nell'intorno di b la funzione U sarà del tipo:

$$\mathrm{U} = \mathrm{H}(y) + \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega(y)\log(y - b),$$

in cui $\mathrm{H}(y) = \Sigma\eta_i(y)$ è olomorfa nell'intorno considerato.

Osservazione 3ª. — La funzione U è una di quelle che Poincaré chiama *funzioni normali* ν, relative alla curva C.

11. Supponiamo ora che la curva C sia suscettibile di variare con continuità sulla F, e sia $\bar{\mathrm{C}}$ una curva ad essa vicinissima. Per la genericità degli assi, le C, $\bar{\mathrm{C}}$ non contengono alcun punto singolare (punto di contatto di piani $y = \text{cost.}$).

Si potrà sempre supporre che $\bar{\mathrm{C}}$ sia così prossima a C, che indicate con $\bar{x}_1^{(0)}, \ldots, \bar{x}_n^{(0)}$ le intersezioni di $\bar{\mathrm{C}}$ col piano $y = y_0$, cioè colla riemanniana $f(x, y_0, z) = 0$, rispettivamente prossime a $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, il punto $\bar{x}_i^{(0)}$ appartenga, su tale riemanniana, allo stesso foglio cui appartiene $x_i^{(0)}$. Indicheremo inoltre con $\bar{\sigma}_1^{(0)}, \ldots, \bar{\sigma}_n^{(0)}$ i cammini, vicinissimi a $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$, che vanno da P ai punti $\bar{x}_1^{(0)}, \ldots, \bar{x}_n^{(0)}$. I cammini $\sigma_i^{(0)}, \bar{\sigma}_i^{(0)}$ saranno omologhi fra di loro.

Facendo variare y a partire da y_0 viene a definirsi, in corrispondenza alla curva C, la somma $\bar{U}$ analoga ad U. Quando y compie un giro attorno al valor singolare $y = b$, $\bar{U}$, in forza del n. prec., subisce lo stesso aumento $\Sigma m_i \omega_i$ subìto da U, cosicchè la differenza $U - \bar{U}$ resta inalterata. Tale differenza è perciò funzione olomorfa di y in tutto il piano y, ivi compresi i valori singolari ed il valore $y = \infty$. Essa è perciò una costante. E sarà una costante nulla, se l'integrale u possiede un valore critico (n. 10, Oss. 1ª). In particolare questo accadrà quando u provenga da un'aggiunta di ordine $m - 3$. Possiamo concludendo enunciare:

Se C *è una curva suscettibile di variare con continuità sulla superficie* F *e* φ *è un'aggiunta d'ordine* $m - 3$ *ad* F, *passante per la retta impropria dei piani* $y = cost.$, *la somma* U *dei valori assunti dall'integrale* (24) *nei punti ove* C *sega il piano variabile* $y = cost.$, *considerata come funzione del parametro* y, *si altera per una costante additiva tutte le volte che* C *si sposta di poco nel proprio sistema continuo.*

SE φ È UN'AGGIUNTA D'ORDINE $m - 3$ AD F, LA VARIAZIONE DI U PER UN PICCOLO SPOSTAMENTO DI C, È ADDIRITTURA NULLA; *e ciò anche se lo spostamento di* C *non avviene entro un sistema lineare.*

Fisica. — *L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère.* Nota II del Socio O. M. CORBINO (1).

Si è visto nella Nota I sullo stesso argomento che se si attribuisce il trasporto dell'elettricità e del calore nei metalli al movimento dei soli elettroni negativi si dovrebbe poter constatare con un disco percorso da un flusso calorifico radiale e disposto normalmente a un campo magnetico, una azione di trascinamento analoga a quella manifestata dalla ruota di Barlow. Invece la teoria di Drude che spiega il trasporto del calore e della elettricità col contemporaneo movimento di ioni dei due segni prevede un'azione meccanica nulla.

Era perciò importante esaminare i risultati dell'esperienza opportunamente condotta; e poichè il fenomeno ricercato sta in relazione con le correnti circolari create per effetto del campo in un disco percorso da un flusso termico radiale, occorreva servirsi di un metallo come il bismuto che manifesta quelle correnti in misura cospicua.

All'esperienza furono date due forme concettualmente equivalenti.

In una prima attuazione, disposto un elettromagnete in modo da creare fra le masse polari un campo verticale, fu sospeso a mezzo di un filo sottile

(1) Presentata nella seduta del 7 novembre 1920.

metallico passante nel canale dell'elettromagnete un disco di bismuto orizzontale. Dal canale inferiore dell'elettromagnete sporgeva una piccola ansa di platino riscaldabile con una corrente elettrica; l'ansa era disposta vicino al centro del disco, nel quale si poteva così creare a volontà un flusso di calore radiale centrifugo. I movimenti di rotazione del disco nel suo piano intorno al filo verticale di sospensione, potevano esser constatati a mezzo di uno specchietto fissato all'equipaggio che sostiene il disco. Particolari cure vennero prese per assicurare la verticalità della direzione media del campo fra le facce polari e il parallelismo del disco alle facce medesime, cosicchè eccitando il campo a disco freddo non si avevano spostamenti sensibili nella posizione di riposo del disco.

Riscaldando il centro del disco con l'ansa, a campo eccitato, si manifestò una lieve rotazione del disco fino a una nuova posizione di equilibrio; il senso della rotazione coincideva con quello previsto sulla base dell'azione di trascinamento dovuta agli elettroni negativi. Ma il risultato ottenuto era fallace, come fu constatato con la seguente prova.

La testa del filo di sospensione poteva essere rotata progressivamente, così da dare al disco diverse posizioni di riposo iniziali. Se lo spostamento constatato riscaldando il centro fosse stato dovuto alla causa supposta, per qualunque posizione di partenza del disco esso avrebbe dovuto ruotare dal medesimo angolo e sempre nello stesso senso.

Invece si trovò che lo spostamento mutava col variare della posizione di partenza; e precisamente dando alla testa del filo delle rotazioni iniziali progressive di 0,90°, 180° e 270°, gli spostamenti prodotti dal riscaldamento mutavano di valore e di segno, così da dare, per le quattro posizioni suddette, una media sensibilmente nulla.

Evidentemente il disco non era simmetrico nella sua costituzione rispetto al centro; e non era neanche simmetrico il campo rispetto all'asse polare; le correnti termoelettriche create nel disco per il riscaldamento imprimevano ad esso un movimento corrispondente a una coppia media nulla per un giro completo. Ma l'azione ricercata era inesistente nei limiti di sensibilità della disposizione adottata.

Per eliminare tale azione perturbatrice, e creare nel sistema mobile condizioni che rendessero facile la previsione quantitativa dell'effetto cercato, si sostituì al disco un cilindro cavo, sempre di bismuto, alto cm. 2, del diametro esterno di cm. 4,6 e del diametro interno di cm. 3,5. Esso era sostenuto, con l'asse verticale, mediante una bacchettina di vetro passante per due forellini diametrali del cilindro; la bacchettina era a sua volta fissata mediante una piccola forchetta pure di vetro al filo di sospensione.

Il cilindro cavo di bismuto era circondato, a un mezzo millimetro di distanza, da un cilindro di rame coassiale, funzionante da riscaldatore esterno, in virtù di un sistema di spire in nichel-cromo isolate con mica e nelle

quali si poteva inviare una corrente elettrica. Questo cilindro riscaldatore si appoggiava sulla faccia inferiore dell'ettromagnete, formando come un involucro a temperatura costante intorno al cilindro di bismuto. Questo veniva poi raffreddato nella sua parete interna mediante una scatoletta cilindrica di rame sottile, situata a piccolissima distanza (meno di 1 mm.) e nella quale si faceva circolare acqua fredda. Le due superficie laterali del cilindro di bismuto e quella esterna del cilindro raffreddatore di rame erano coperte di nero fumo per facilitare gli scambi termici. Si potè così produrre un regolare e forte gradiente termico fra le pareti esterna ed interna del cilindro di bismuto.

Si ricercò anzitutto l'azione del campo sul cilindro a freddo, e la si constatò appena sensibile, dimostrandosi così soddisfacenti le condizioni di simmetria del cilindro nel campo e trascurabili le forze ponderomotrici dovute al diamagnetismo.

Creando poscia il gradiente termico, ed eccitando il campo nei due sensi si riscontrarono delle rotazioni lievi del cilindro, che si invertivano all' invertire del campo. Ma anche in questo caso, come in quello del disco, mutando la posizione di riposo iniziale del cilindro con lo spostare la testata superiore del filo, i movimenti riferiti, che erano del resto di piccola entità, si manifestarono mutevoli al variare della posizione di partenza: cosicchè effettuando delle letture per 24 posizioni della testa del filo angolarmente distanti di 15°, la media delle letture si trovò assai prossima a zero, e mutevole nella serie di esperienze successivamente eseguite in identiche condizioni.

Il risultato dell'esperienza può quindi considerarsi negativo.

Volendo assicurarmi che nelle condizioni indicate esistesse realmente quella corrente elettrica circolare che è il fondamento della previsione di un'azione meccanica di trascinamento, l'elettromagnete fu riportato nella posizione normale, cioè ad asse orizzontale, e il cilindro, sempre col suo asse parallelo alle linee di forza, fu sospeso a un filo verticale. Collocati come prima il cilindro riscaldatore e il raffreddatore, si cominciò a ricercare, a freddo, l'azione orientatrice nel campo dovuta al diamagnetismo; tale azione tendeva a mantenere il cilindro nella sua posizione iniziale, scelta in modo che il cilindro aveva il suo asse parallelo alle linee di forza. Sotto l'azione del campo tale posizione di riposo dovuta al diamagnetismo era così stabile che una rotazione della testata superiore del filo capace di imprimere al sistema, senza campo, uno spostamento di 330 millimetri sulla scala, determinava uno spostamento di soli 60 millimetri sotto l'azione del campo. Esisteva cioè una notevole forza direttrice dovuta al diamagnetismo. Ma facendo anche agire il riscaldamento si aggiungeva alla precedente una ulteriore forza orientatrice dovuta alla corrente circolare, cosicchè allo stesso spostamento della testata del filo corrispondeva una rotazione di soli 35 mm.

(anzichè 60) nel cilindro. Ciò dimostra l'esistenza di una corrente circolare permanente nel cilindro, dovuta al gradiente termico, mentre il riscaldamento avrebbe dovuto (se questa corrente non esistesse) far diminuire l'azione orientatrice prodotta dal diamagnetismo, a causa della nota diminuzione del diamagnetismo del bismuto in conseguenza del riscaldamento.

Si potè così stabilire che il cilindro cavo di bismuto, nelle condizioni dell'esperienza, era percorso circolarmente da una corrente totale di circa 5 centesimi di ampère.

Conosciuto il valore della corrente si può calcolare l'entità numerica dell'effetto meccanico che dovrebbe esistere in base alla ipotesi monistica. La forza elettromotrice che mette in movimento gli elettroni nel senso circolare sarà

$$X = \frac{j}{\sigma}$$

dove j è la densità della corrente circolare e σ la conducibilità del metallo. Se si hanno n elettroni per centimetro cubo, portanti ciascuno la carica e, tale forza elettromotrice che agisce su ciascun elettrone determinerà sull'insieme degli elettroni esistenti in un centimetro cubo una forza globale data da

$$F = neX$$

la quale si trasmetterà integralmente alla materia del conduttore, mancando la controazione dovuta ai centri positivi che sono fissi, e perciò non subiscono azione da parte del campo magnetico.

Questa forza agirà tangenzialmente per ogni unità di volume dell'intero cilindro e con un braccio b pari al raggio medio del cilindro, equivalendo a una coppia di momento

$$M = Xnevb$$

dove v è il volume del cilindro.

Ora nella ipotesi monistica il prodotto ne è all'incirca eguale all'inverso del coefficiente R di Hall, che è circa 10 nel bismuto.

Si ha inoltre

$$X = \frac{j}{\sigma} = \frac{0{,}0045}{8 \times 10^{-6}}; \quad v = \text{cm}^3\ 14{,}3; \quad b = \text{cm.}\ 2.$$

Sostituendo si ottiene

$$M = 1600 \text{ dine-centim.}$$

E poichè il filo di sospensione reagisce con la coppia di circa 41 dine-cm. per la torsione di radiante fra i due estremi, risulta che la coppia torcente dovuta al riscaldamento avrebbe dovuto produrre una rotazione del sistema

di oltre sei giri completi. Invece l'effetto cercato, se pure esisteva, era certo inferiore a una rotazione di 2 millesimi di radiante, e quindi, sempre se esiste, inferiore a un ventimillesimo del valore previsto in base alle considerazioni precedenti.

Il risultato negativo dell'esperienza sembrerebbe pertanto inconciliabile con qualunque teoria della conducibilità elettrica e calorifica che si fondi sulla mobilità dei soli centri negativi. Esso mi ha spinto ad approfondire l'indagine sulla esistenza o meno delle correnti elettriche di origine termomagnetica, in base alla teoria di Lorentz, com'è stata completata dal Gans per il calcolo dell'effetto del campo magnetico sul flusso elettronico. Il risultato di questa nuova indagine, i cui particolari saranno esposti in una prossima Nota, è il seguente: come con la teoria di Drude, anche con la teoria di Lorentz-Gans si giustifica l'esistenza delle correnti circolari elettriche di origine termomagnetica da me osservate; ma insieme con esse si genera un flusso circolare (vorticoso) di energia termica senza differenza di temperatura lungo il cerchio, e in senso opposto al flusso elettronico. *L'azione meccanica complessiva sul disco risulta però eguale a zero*, come l'esperienza ha confermato.

Pertanto il risultato negativo dell'esperienza è giustificabile tanto con la teoria di Drude quanto con quella di Lorentz-Gans; cioè non conduce, come pareva a prima vista, alla necessità dell'esistenza di ioni mobili positivi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Determinazioni astronomiche di latitudini e longitudini eseguite nell'Asia Centrale.* Nota di Giorgio Abetti, pres. dal Socio V. Volterra [1].

Il programma di osservazioni astronomico-geodetiche che il Comandante A. Alessio e lo scrivente dovevano svolgere durante la spedizione De-Filippi nell'Asia Centrale negli anni 1913-14 comprendeva determinazioni di coordinate astronomiche, sia per fissare punti particolarmente interessanti nelle regioni percorse, sia per stabilire, dal confronto delle coordinate astronomiche con quelle geodetiche, la deviazione della verticale in quelle stazioni nelle quali si fosse potuto effettuare il collegamento con i vertici della triangolazione indiana.

I risultati ottenuti per le latitudini e longitudini astronomiche di varie località del Baltistan, del Ladàk e del Turchestan si comunicano in questa Nota, mentre sono in corso di stampa nelle memorie della spedizione, le

[1] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

relazioni dello scrivente contenenti le osservazioni e la loro riduzione e discussione.

Le latitudini sono state determinate con un telescopio zenitale di Troughton e Simms di 63 mm. di apertura, usando il metodo di Horrebow-Talcott. Le stelle vennero scelte in massima parte dal Preliminary General Catalogue di Lewis Boss. Osservatori furono: Alessio e lo scrivente per le prime otto stazioni, il marchese Ginori e lo scrivente per le ultime tre.

Le longitudini vennero determinate mediante la telegrafia senza fili. Per accordi presi fra l'Ufficio Geodetico dell'India (Trigonometrical Survey) che ha sede in Dehra Dun, e la spedizione, segnali radiotelegrafici emessi dalla stazione radiotelegrafica militare di Lahore vennero ricevuti contemporaneamente a Dehra Dun e nelle varie stazioni della spedizione.

I segnali emessi dalla stazione di Lahore con lunghezze d'onda di 1800 e 2000 metri, mediante scintille musicali date da uno scaricatore a disco del tipo Marconi, venivano ricevuti: dalla spedizione con un aereo orizzontale della lunghezza di 180 metri e con un apparato ricevente della Regia Marina con detector a cristallo di carborundum; a Dehra con un'antenna verticale di 30 metri di altezza, con 7 fili sospesi ad « ombrello » e un apparato ricevente con detector a cristalli di bornite e zincite. Essendosi determinati gli istanti dei segnali, a Dehra e nelle stazioni della spedizione in tempo sidereo locale con osservazioni di passaggi di stelle in meridiano, le differenze di tali istanti sono le differenze di longitudine fra dette stazioni e Dehra. Da Lahore furono inviati 90 segnali per ogni sera di osservazione divisi in tre gruppi, ognuno dei quali veniva ascoltato con la cuffia telefonica da una coppia di osservatori e registrato con tasti a mano sui rispettivi cronografi sui quali venivano registrate anche le osservazioni di tempo. Queste ultime vennero eseguite a Dehra con uno strumento di passaggi presso l'Osservatorio del « Trigonometrical Survey », collegato con differenza di longitudine astronomica a Greenwich; quelle della spedizione con uno strumento dei passaggi di Troughton e Simms a canocchiale diritto con 65 mm. di apertura, montato su di un treppiede di legno e ferro. Le osservazioni di tempo vennero in generale eseguite subito dopo il tramonto del sole in due gruppi simmetricamente disposti prima e dopo i segnali radiotelegrafici e i passaggi registrati sui cronografi con tasto a mano.

Gli osservatori a Dehra furono cinque: il maggiore E. A. Tandy, il dott. J. de Graaff Hunter, il capitano (ora maggiore) K. Mason, il signor E. C. J. Bond e il sig. Hanuman Prasad, i quale si scambiarono in vario modo durante il corso delle osservazioni; per la spedizione furono: Alessio, il marchese Ginori e lo scrivente per le prime cinque stazioni, Ginori, il maggiore Wood (in una stazione) e lo scrivente per le ultime tre.

Non essendo stato possibile lo scambio degli osservatori per la eliminazione delle equazioni personali che entrano nella registrazione dei passaggi

di stelle e in quelle dei segnali, le osservazioni di tempo sono state ridotte ad un osservatore medio e tutte le differenze di longitudine ad una coppia tipo di osservatori.

Nella seguente tabella sono dati i nomi delle località dove vennero eseguite le stazioni e le latitudini φ ridotte al livello del mare (1), alla posizione media del polo con i risultati provvisorî del servizio internazionale delle latitudini (2), ed i loro errori medî. Segue nella terza colonna il numero n delle sere di osservazione ed il numero N delle coppie osservate; nella quarta le differenze di longitudine $\Delta\lambda$, fra le varie stazioni e Dehra Dun, espresse in tempo col loro errore medio; e nella quinta colonna il numero delle sere di osservazione. Nell'ultima colonna si trovano le longitudini rispetto a Greenwich, espresse in arco, avendo assunto per longitudine astronomica dello strumento dei passaggi a Dehra Dun il valore (3):

78° 2′ 49.″01 E. Gr.

Stazioni	φ	n / N	$\Delta\lambda$ Ovest di Dehra Dun	n	$\Delta\lambda$ Est di Greenwich
Tolti (Baltistan)	+ 35° 2′ 0.″11 ± 0.″34	3 / 10	—	—	—
Wazul Hadur (Baltistan)	+ 35 12 22.21 ± 0.28	2 / 4	—	—	—
Scardu (Baltistan)	+ 35 18 18.05 ± 0.17	5 / 16	0h 9m 37.740 ± 0.s024	6	75° 38′ 22.″92
Càrghil (Baltistan)	+ 34 33 38.25 ± 0.51	1 / 11	7 40.617 ± 0.028	3	76 7 39.72
Lamaiuru (Ladàk)	+ 34 17 4.81 ± 0.23	1 / 12	5 5.006 ± 0.039	5	76 46 33.86
Leh (Ladàk)	+ 34 9 54.10 ± 0.19	3 / 9	1 51.668 ± 0.020	7	77 34 53.89
Depsang (Caracorùm)	+ 35 17 20.77 ± 0.18	2 / 14	0 18.067 ± 0.054	5	77 58 17.85
Fronte Ghiacciaio Rimu (Caracorùm)	+ 35 20 48.39 ± 0.23	1 / 14	—	—	—
Sughèt Carol (Turchestan)	+ 36 20 54.91 ± 0.16	3 / 8	0 4.858 ± 0.044	3	78 1 36.09
Iàrcand (Turchestan)	+ 38 21 22.22 ± 0.31	2 / 14	3 8.202 ± 0.043	4	77 15 46.02
Càshgar (Turchestan)	+ 39 28 19.74 ± 0.31	2 / 13	8 14.896 ± 0.015	4	75 59 5.64

(1) W. Bowie, *Determination of time, longitude, latitude and azimuth* U. S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication n. 14, p. 130. Washington 1913.

(2) Astr. Nachr. 4749 e 4802.

(3) J. de Graaff Hunter. *The Earth's Axes and Triangulation.* Survey of India. Professional Paper n. 16. Dehra Dun 1918. Il dato che si trova a p. 165: 628 8 piedi, equivalenti a 7.″18, deve essere corretto, secondo una comunicazione dell'autore allo scrivente in: 654.0 piedi equivalenti a 7.″46.

La precisa indicazione delle località dove venne collocato lo strumento zenitale e lo strumento dei passaggi verrà data nelle pubblicazioni della spedizione. qui basti dire che a Tolti, Scardu, Càrghil, Lamaiuru le osservazioni vennero eseguite nella immediata vicinanza dei « bungalows » che sono stazioni di tappa per i viaggiatori che attraversano quelle regioni; la latitudine di Wazul Hadur si riferisce al campo della spedizione situato nella stretta valle immediatamente sotto il passo Burgi, che porta sull'altipiano Deosei; a Leh la stazione astronomica era situata presso ai « bungalows » appartenenti alla Residenza inglese, e sull'altipiano Depsang al campo base della spedizione, a 5359 metri s. l. m., presso alla carovaniera che dal Ladàk conduce nel Turchestan; alla fronte del ghiacciaio Rimu venne fatta stazione sulla riva sinistra del fiume Sciàiok in immediata vicinanza della fronte del ghiacciaio, a m. 4912 s. l. m. A Sughét Caroi le osservazioni si fecero nel vecchio forte cinese sulle rive del fiume Caracàsh; a Jàrcand nella località chiamata *Baryhá* a sud-est di Kone-Shar (città vecchia); a Càshgar in un antico cimitero mussulmano situato fra i consolati inglese e russo a nord di Kone-Shar.

La situazione topografica delle varie stazioni non sembra abbia avuto alcuna notevole influenza sulle condizioni di recezione radiotelegrafica, poichè i segnali si poterono ricevere sempre anche in quelle località, come per esempio a Lamaiuru e Càrghil, le quali si trovano situate in strette e profonde valli affluenti della valle dell'Indo, fra le catene dell'Himálaia e del Caracorúm. Gli « intrusi » o « scariche » sono state invece causa di maggiore perturbazione, specialmente in estate durante la stagione dei monsoni di sud-ovest. La recezione dei segnali non venne mai del tutto impedita dalle « scariche », ma la precisione delle determinazioni restò diminuita in conseguenza del minor numero di segnali registrati e delle difficolà con cui questi si dovevano ascoltare fra le « scariche » stesse.

Sei delle sopra scritte stazioni si poterono da noi collegare con i vertici della triangolazione indiana e per esse verranno in seguito comunicate le deviazioni della verticale. Per le ultime tre nel Turchestan, fuori della regione coperta dalla triangolazione indiana, non esistevano finora che valori incerti delle coordinate e per le longitudini molto discordanti.

Mineralogia. — *Sulla presenza dello zinco nella malachite di Chessy* (1). Nota di C. Perrier, presentata dal Socio E. Artini (2).

In un lavoro, pubblicato nel precedente fascicolo dei Rendiconti di questa Accademia, ho potuto dimostrare che la Rosasite, cui dal prof Lovisato era stata attribuita la formula:

$$2\,CuO\,.\,3\,CuCO_3\,.\,5\,ZnCO_3$$

era, invece, un carbonato basico di Zinco e Rame, con costituzione analoga a quella della Malachite $CuCO_3\ Cu(OH)_2$, corrispondente, probabilmente, ad una formula di questo tipo:

$$(Zn\,,\,Cu)\,CO_3\,.\,Cu(OH)_2$$

cioè, probabilmente, un sale doppio di carbonato di zinco e di idrato di rame con una parte dello zinco, però, sostituito dal rame.

Poichè la rosasite veniva, quindi, ad aggiungersi ad un altro idrocarbonato naturale, già noto, l'auricalcite, nel quale pure una parte dello zinco è sostituito dal rame, volli vedere, data la spiccata capacità di questi due elementi di sostituirsi isomorficamente, se ed in quale misura questa sostituzione si verificasse nelle malachiti. Uno sguardo alle ormai numerose analisi di malachiti delle varie località pareva veramente rendere inutile la ricerca, perchè in nessuna di esse era mai stato trovato altro metallo all'infuori del rame, se si eccettuano un'analisi di una malachite di Phoenixville (Pensilvania) eseguita da Smith (3), che vi trovò 0,12 % di Fe_2O_3, e le due analisi eseguite da Haeye (3) sopra una malachite della miniera Reinhold Forster presso Eiserfeld, dove vi rinvenne circa lo 0,09 % di FeO.

Tuttavia, pensando che i migliorati metodi analitici avrebbero potuto mettere in evidenza quanto prima non si era potuto fare, ho preso in esame una purissima e bellissima malachite cristallizzata di Chessy, di un campione esistente in questo Museo.

Di questa località si conoscono tre analisi; una di Vauquelin (4) del 1813, un'altra di R. Phillips (4) del 1818, ed infine una terza dovuta a Berthier (4); delle quali solo l'ultima è in buon accordo con la formula, quale risulta dagli attuali pesi atomici.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino diretto dal prof. F. Zambonini.

(2) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(3) Cfr. Doelter, Handbuch d. Mineralchemie, Bd. I (1912), pp. 459 e segg.

(4) Citato secondo Doelter, loc. cit.

Il metodo analitico da me impiegato fu quello stesso già adoperato per la rosasite: l'acqua e l'anidride carbonica vennero determinate direttamente per pesata, il rame ed il piombo vennero separati elettroliticamente dalla soluzione nitrica del residuo, dopo avere eliminato per filtrazione alcuni fiocchetti di materia insolubile, e quindi dopo aver precipitato il ferro con ammoniaca si separò lo zinco come solfato zinco-ammonico e lo si pesò allo stato di pirofosfato di zinco, ottenendone, da grammi 1,1024 di malachite, ben grammi 0,0092.

I risultati analitici furono i seguenti:

		Rapporti molecolari		$CuCO_3.Cu(OH)_2$
H_2O	8,36	1,023	1,02	8,15
CO_2	19,87	1,000	1,00	19,90
CuO	71,31	1,976	1,99	71,95
ZnO	0,45	0,012		100,00
Fe_2O_3	0,04			
PbO	tracce			
Residuo	tracce			
	100,03			

corrispondenti quindi ad una malachite tipica nella quale però una certa quantità non trascurabile, per quanto piccola, di rame, è sostituita dallo zinco.

Nessun dubbio vi poteva essere che il minerale fosse veramente malachite, perchè, oltre la provenienza ed il colore tipico, confermavano la sua natura l'esame microscopico dei frammentini ottenuti schiacciandone dei granellini fra due vetrini, frammenti che lasciavano vedere abbastanza frequenti i noti geminati secondo {100}, tabulari secondo {010} e nei quali si osservava un angolo di estinzione di circa 23° con il seguente pleocroismo

Np = verde assai pallido
Ng = verde malachite.

Si potevano osservare, poi, mediante la linea di Becke, i seguenti indici di rifrazione

$$Np = 1{,}703$$
$$Ng > 1{,}745\ .$$

Nessun dubbio, inoltre, che il prodotto formatosi fosse veramente fosfato zinco-ammonico, perchè la soluzione, da cui era stato separato il ferro ed era stata concentrata a piccolo volume, non aveva lasciato separare nulla, dopo essere stata resa fortemente ammoniacale era perfettamente incolora, mentre, se tutto il rame non fosse stato separato, avrebbe dovuto essere colorata in azzurro; ed inoltre il precipitato cristallino, ottenutosi per eli-

minazione dell'ammoniaca a bagno-maria, si mantenne perfettamente bianco dopo calcinazione di 900°.

Del resto ne controllai la natura con pochi saggi microchimici.

Il risultato ottenuto mi pare non privo di interesse, non solo perchè dimostra ormai in modo certo, che anche nelle malachiti una parte di rame può venire sostituita dallo zinco (in questo caso si avrebbe 0,65 % del composto $ZnCO_3 . Zn(OH)_2$), ma anche perchè rende sempre più probabile, data la piccola quantità di zinco presente nella malachite, che la rosasite sia veramente un sale doppio di rame e di zinco, e non una semplice miscela isomorfa dei corrispondenti composti dei due elementi.

Del resto la differenziazione della rosasite dalla malachite riesce assai netta anche al microscopio, e nel seguente prospetto ho messo a confronto i caratteri distintivi di questi due minerali quali si possono constatare, qualora si frantumino fra due vetrini dei frammenti rispettivamente di malachite e di rosasite.

Rosasite	*Malachite*
Laminucce ad estinzione sempre parallela alla direzione di allungamento con indici di rifrazione per la luce del sodio:	Laminucce parte (secondo {010}) ad estinzione inclinata di circa 23° con l'asse verticale, ed altre (secondo {001} con estinzione parallela. Nelle prime si osserva (per la luce del Na)
1,71 nella direzione di allungamento $> 1{,}745$ » » ad essa normale.	$Np = 1{,}703$ $Ng > 1{,}745$. Nelle altre ad estinzione parallela gli indici di rifrazione sono sempre $> 1{,}745$.
Le laminucce mostrano quasi costantemente carattere ottico *negativo* della direzione di allungamento.	Le laminucce ad estinzione parallela, che in luce convergente lasciano vedere emergere la bisettrice di un grande angolo degli assi ottici, per essere per lo più allungate secondo x mostrano quasi sempre carattere ottico *positivo* della direzione di allungamento.
In queste lamine si ha il seguente pleocroismo: *verde azzurrino quasi incoloro* parallelamente direzione d'allungamento; *verde azzurrino* ben netto normalmente ad essa.	Nelle lamine ad estinzione parallela si ha il seguente pleocroismo: *verde malachite* = Ng *giallo verdastro* = N_m.
Non si osservano mai geminati.	Frequentissimi i geminati secondo {100}, anche polisintetici.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici.* V: *Fenomeni di mutazione fisiologica brusca* [1]. Nota di Costantino Gorini, presentata dal Socio Körner [2].

In Note precedenti [3] ho messo in luce l'influenza di varî fattori sulla attività proteolitica dei fermenti lattici; nella presente intendo dimostrare l'insorgenza di *mutazioni* di tale attività, le quali parmi si prestino altresì a nuove vedute sulla dibattuta questione delle mutazioni.

Nei trapianti settimanali in latte che vado facendo da *oltre un ventennio* sono solito osservare parecchie irregolarità nel comportamento dei fermenti lattico proteolitici. Sono irregolarità concernenti la rapidità di coagulazione, il grado di acidificazione, l'intensità di peptonizzazione ecc., le quali, in forza delle ragioni esposte nei miei lavori, sono di facile imputazione a inevitabili variazioni di tecnica, vuoi nella quantità di semente, vuoi nel calibro delle provette da cui dipende l'estensione della superficie libera della cultura e quindi l'aerobiosi, vuoi nella temperatura di incubazione, vuoi nella qualità del latte *ab origine* o in conseguenza della sterilizzazione, ecc. Trattasi però di irregolarità fluttuanti di lieve entità e, quel che più monta, mancanti di qualsiasi carattere di stabilità e nemmeno di progressione nei successivi trapianti, che possa accennare ad un principio di tramutamento foss'anche per tappe.

Qualche volta però ho assistito a fenomeni che hanno l'aspetto di vera *mutazione* nel senso classico della parola, cioè di un cambiamento brusco spontaneo e trasmissibile per ereditarietà.

Noi sappiamo che i fermenti lattico-proteolitici hanno la duplice proprietà di coagulare il latte in un primo tempo e di ridisciogliere poi gradatamente il coagulo in un secondo tempo. Orbene: culture che per parecchi anni avevano presentato il suddetto comportamento tipico, d'un tratto a un determinato trapianto hanno invece di colpo peptonificato rapidamente e completamente il latte senza previa coagulazione, a mo' dei ben noti bacilli semplicemente peptonizzanti. Il primo caso di siffatto cambiamento improvviso mi si verificò quindici anni or sono; dapprincipio sospettai di un inquinamento, ma l'esame microscopico culturale me lo fece escludere; pensai

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia dalla R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[3] Rendic. R. Acc. Lincei, ottobre 1915, novembre 1915, ottobre 1917.

poscia si trattasse di uno scarto effimero legato forse ad un'incognita particolare qualità del latte ovvero ad altra condizione non immediatamente discernibile del *modus operandi* che avesse influito disgenesicamente; ma il ripetersi del fenomeno nei successivi trapianti della cultura anomala, pur variando la qualità del latte e tutte le condizioni di tecnica (dalla dose della semente alla temperatura di incubazione), me ne dissuase. Mi accostai allora all'idea di essere in presenza di una mutazione brusca e mi limitai ad annoverare una nuova conferma della teoria del De Vries applicata al campo batteriologico.

Volli tuttavia toglier di mezzo il dubbio di mescolanze originali di razze distinte sottoponendo gli stipiti dei fermenti lattico-proteolitici a processi isolanti col metodo Burri dell'inchiostro di china a fine di disporre di culture che partissero da un'unica cellula. Contuttociò essendomi negli anni appresso sopravvenuti altri casi di siffatte mutazioni, mi proposi di approfondire le investigazioni allestendo dalla medesima cultura normale, che aveva figliato il subitaneo scarto peptonizzante, parecchi altri trapianti che misi nelle identiche condizioni del trapianto anormale; ebbene, tutti questi secondi trapianti gemelli si comportarono invece in modo regolare, mentre lo scarto perseverò a riprodursi anormale nella propria discendenza, talchè potei conservare i due tipi paralleli, considerandoli come due varietà di una sola specie: una varietà tipica coagulante proteolitica e l'altra atipica solamente proteolitica. Siffatta constatazione valse a rivelarmi che il fenomeno della mutazione non aveva colpito *in toto* la cultura, ma si era circoscritto ad una porzione di essa; laonde mi sentii autorizzato a dedurne che le cellule di una medesima cultura possono differenziarsi fra loro a segno da determinare una mutazione brusca solamente in alcune di esse.

Un caso più recente venne a ribadirmi sempre più in questo ordine di idee. Trattasi di un caso di cangiamento in senso inverso, dirò così di una *retromutazione*: un trapianto della varietà atipica di una delle succitate specie doppie si ritrasformò di botto, dopo cinque anni, sempre per influenze inafferrabili, nella varietà tipica, persistendo tale nella discendenza; mentre altri trapianti paralleli fatti dalla medesima cultura atipica perdurarono nel loro comportamento anormale.

Cotali accertamenti mi suggerirono una interpretazione del fenomeno che si discosta da quelle addotte comunemente per spiegare le mutazioni improvvise; e poichè si tratta di *mutazioni parziali* di una cultura, non regge nemmeno la spiegazione allegata dal Preisz per riportare le mutazioni a conseguenze di condizioni disgenesiche, in cui la improvvisa comparsa di colonie con proprietà nuove non significa origine improvvisa, ma il risultato di una moltiplicazione e di una selezione elettiva di forme già esistenti in una cultura, le quali non sono dimostrabili nei trapianti in condizioni eugenesiche perchè mascherate dal fortissimo prevalere di un tipo determinato.

Nel caso presente io ravviserei invece una giustificazione sufficiente e adeguata dei mutamenti bruschi in un ragionamento come il seguente.

Il comportamento normale dei fermenti lattico-proteolitici è caratterizzato da un duplice meccanismo saccarolitico-acidificante e caseolitico-peptonizzante, per cui la caseina dapprima precipita e in seguito si solubilizza. Orbene: fra le cellule dotate di questo doppio potere è logico e fatale che, accanto a quelle le cui due facoltà sono per così dire equilibrate, ve ne siano di prevalentemente saccarolitiche e di prevalentemente caseolitiche; si può ammettere quindi che nell'ammasso di cellule costituenti la sementa vi sia di norma una specie di compensazione onde i trapianti si mantengono di regola coagulanti-peptonizzanti; ma si può ammettere altresì di incappare qualche volta in una sementa formata in grande predominio di cellule di un tipo solo, ad es. del tipo prevalentemente caseolitico e allora si spiega la comparsa repentina della varietà peptonizzante, la quale poi si trasmette per eredità nei successivi passaggi..... finchè per caso si imbatte in una sementa formata da un lotto di cellule a facoltà equilibrate e allora riappare di punto in bianco la varietà tipica.

Qui vien fatto di domandarsi se, come sorge una varietà che peptonifica senza coagulare, non possa spuntare una varietà che coagula senza peptonizzare a guisa dei fermenti lattici semplici. La risposta che desumo dalle mie osservazioni ventennali è piuttosto negativa; e ben si comprende. Nella varietà in cui la coagulazione è saltata, non è che la saccarolisi taccia del tutto; tant'è vero che il latte assume reazione acida crescente; gli è soltanto che l'azione saccarolitica è debole e tardiva rispetto alla proteolitica, cosicchè questa, prevenendo quella, spiega diffilato la propria attività sulla caseina trasformandola in paracaseina o caseone e simultaneamente solubilizzandola, prima che abbia campo di precipitare. Analogamente, nella varietà coagulante, per quanto sia energica la saccarolisi, l'attività proteolitica non è mai soppressa; può succedere solamente che essa sia procrastinata di parecchio tempo; ma in seguito, anche se la saccarolisi pronunciata desse un grado di acidificazione tale da arrestare la vita delle cellule, l'enzima proteolitico contenuto in queste abbenchè silenti o spento finisce, come pure ho dimostrato (1), col dissolvere, tosto o tardi, il coagulo.

***

Conclusione. — Le presenti osservazioni ventennali sopra culture sicuramente pure dimostrano:

1°) che i fermenti lattici presentano fenomeni di *mutazione* e *retromutazione brusche spontanee* e *trasmissibili*, indipendenti dalle condizioni di sviluppo, nella loro duplice attività acidificante e proteolitica;

(1) Rend. R. Acc. Lincei, settembre 1911.

2°) che questi fenomeni non colpiscono però una cultura *in toto* ma solamente frazioni di essa, di guisa che essi si prestano ad essere interpretati come semplici variazioni legate a inevitabili divergenze individuali delle cellule batteriche di una medesima specie; cosicchè dette mutazioni perderebbero il significato di anormalità, e rientrerebbero nell'orbita dei fenomeni normali, subordinati al caso fortuito di sementi costituite esclusivamente o quasi da cellule di un solo tipo.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi.* VI: *Sul potere protettivo dell'amido e di altre sostanze sulla ptialina, in ambiente acido* [1]. Nota di D. Maestrini, presentata dal Corrispondente S. Baglioni [2].

Dalla Nota precedente [3] si rilevava che le concentrazioni di HCl, ritenute sino ad ora capaci di distruggere la ptialina [4], sono soltanto in grado, quando sia presente l'amido, di inibire temporaneamente l'azione dell'enzima. Era interessante indagare se, tra le sostanze alimentari, questa proprietà fosse soltanto dell'amido, ovvero fosse anche posseduta, ed in qual grado, dalle ordinarie sostanze proteiche e dai grassi: non meno importante era studiarne il meccanismo d'azione.

In un matraccio (A) versavo cc. 1-2 di saliva mista umana neutra, filtrata, 25 cc. di salda di amido (5 %) [5], agitavo, per qualche secondo, indi aggiungevo 25 cc. di soluzione di HCl (0,4—1,2 ‰); in un secondo matraccio (B) versavo la stessa quantità di saliva, 25 cc. di H^2O distillata neutra, agitavo, indi aggiungevo la stessa quantità di soluzione acida; in un terzo matraccio (C) versavo la stessa quantità di saliva, 25 cc. di albume di uovo (soluzione 40-50 %, in NaCl, 0,9 %), agitavo, indi aggiungevo la stessa quantità di acido (HCl, sciolto in soluzione fisiologica); in un quarto matraccio (D) la stessa quantità di saliva, 15 cc. di olio di mandorle dolci ed H^2O distillata sino al volume di 25 cc., indi la stessa quantità di acido; in un quinto matraccio (E) saliva, grasso di montone solido (4-6 gr.) ed H^2O distillata sino al volume di 25 cc. e la stessa quantità di soluzione acida; in un sesto matraccio (F) saliva, fibrina di sangue di bue, essiccata a 40° C circa (g. 2-4) ed acqua distillata sino al volume di 25 cc., agitavo, indi aggiungevo la solita quantità di soluzione acida; in un settimo matraccio (G) saliva, g. 1-2 di carbone animale ed acqua distillata sino al volume di 25 cc., agitavo, indi aggiungevo la stessa quantità di acido cloridrico.

Tutti i matracci erano tenuti a 35°-40° C. per 1-4 ore, indi i loro liquidi neutralizzati con KOH N/10, alla scorta di carta di tornasole. Dopo neutralizzazione, aggiun-

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

(2) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(3) D. Maestrini, Rendic. R. Accad. dei Lincei, Vol. XXIX, 1920.

(4) F. Kuebel, Pfluger's Arch. 1899, LXXVI, 276-305.

(5) La salda d'amido al 5 % ha un'azione protettiva maggiore che quella al 3 %, già da me altre volte usata.

gevo salda d'amido neutra al 5 % nei matracci, in cui non era stata messa in precedenza, portavo tutti allo stesso volume (cc. 100-120), con acqua distillata neutra, versavo in tutti un po' di toluolo, indi li riportavo in termostato (35-40° C.), e saggiavo il potere amilolitico di ciascuna miscela, di tanto in tanto. Ho fatto anche contemporaneamente esperienze con albume d'uovo, sciolto in acqua distillata: in tal caso nella miscela era una precipitazione più o meno abbondante di globuline.

Ho anche sperimentato separatamente sulla *ovoalbumina* e sulla *ovoglobulina*. Per dealbuminizzare, avanti la determinazione degli zuccheri riducenti, ho usato l'acido tricloracetico.

I risultati sono:

1°) la ptialina umana trova nell'amido (salda 5%) un mezzo protettivo costante ed energico contro HCl; difatti nel matraccio (A) sin dalla prima ora, dopo la neutralizzazione, si osserva un potere riducente, che va gradatamente aumentando in progresso di tempo e manca al momento della neutralizzazione;

2°) l'albume d'uovo, diluito con NaCl (0,9 %) e la fibrina di sangue di bue, non sono capaci di proteggere la ptialina, contro lo stesso acido; difatti, dopo la neutralizzazione, nelle rispettive miscele, mai appare alcun potere riducente;

3°) nella miscela con olio di mandorle dolci, dopo alcune ore dalla neutralizzazione (6-20 ore), si osserva quasi sempre un discreto potere riducente, che manca costantemente nelle prime ore;

4°) il liquido contenente il grasso di montone presenta (non costantemente) un potere amilolitico molto più lieve, e dopo un tempo maggiore dalla neutralizzazione (30-50 ore);

5°) piccole quantità di oleato di potassio (cc. 1-2), aggiunte alla miscela del matraccio (B) ne hanno eccitata l'azione amilolitica;

6°) nella miscela con albume d'uovo, diluito con acqua distillata, nelle prime ore, dopo la neutralizzazione, non si scorge alcun'azione amilolitica, ma nelle ore successive (12-14) si presenta un lieve potere riducente;

7°) anche le miscele, contenenti ovoglobulina, isolata dalla ovoalbumina, dopo tempo vario (24-80 ore), presentano un lieve potere amilolitico; mentre, entro lo stesso tempo, le miscele (B) (in cui la ptialina, prima della neutralizzazione, fu a contatto di solo acido), non mostrano alcuna azione amilolitica;

8°) la ovoalbumina, isolata dalla ovoglobulina, non possiede alcun potere protettivo contro l'acido;

9°) il carbone animale, offre alla ptialina una protezione, contro l'acido cloridrico, anche superiore a quella dell'amido

Di fronte all'amido (salda 5 %), che esercita un forte potere protettivo, abbiamo dunque da un lato due serie di sostanze alimentari, di cui l'una (fibrina di sangue di bue, albume d'uovo, sciolto in soluzione fisiologica, ed ovoalbumina) non protegge la ptialina contro l'acido cloridrico,

l'altra (olio di mandorle dolci, grasso di montone, albume d'uovo, sciolto in acqua distillata), che presenta alcuni particolari interessanti; e, dall'altro lato, una sostanza non alimentare, il carbone animale, che ha un potere protettivo superiore a quello dell'amido.

Una caratteristica comune a tutte le miscele, contenenti *la seconda serie di sostanze suddette*, è quella di presentare un'azione enzimatica molto in ritardo, rispetto a quella mostrata dalla miscela, avente amido (matraccio A). Questo fatto può avere due interpretazioni: o il potere protettivo di queste sostanze è così tenue da richiedere, dopo la neutralizzazione, un certo tempo, perchè l'azione delle minime quantità di enzima, non distrutte, possa esser messa in evidenza, con i nostri mezzi d'indagine; ovvero durante e dopo la neutralizzazione, si formano corpi speciali, capaci, entro un dato tempo, di promuovere l'amilolisi.

La prima ipotesi può spiegare il debole e tardivo potere amilolitico, che si presenta nelle miscele con ovoglobulina pura, essendo l'ovoglobulina, secondo nostre ricerche, capace di fissare piccole quantità di ptialina; con la stessa ipotesi può spiegarsi il potere amilolitico delle miscele con albume d'uovo, diluito in acqua distillata, sapendosi che in mancanza di elettroliti, le ovoglobuline si rendono libere, cioè precipitano. In questo stato esse potrebbero offrire all'enzima una lieve protezione, contro l'acido cloridrico.

La seconda ipotesi serve a spiegare sia il notevole (sebbene tardivo e non sempre costante) potere amilolitico delle miscele, contenenti olio di mandorle dolci, sia quello assai debole ed anche più tardivo ed incostante delle miscele con grasso di montone; supponendo che, durante la neutralizzazione, si formino ad es., piccole quantità di saponi (oleati e stearati di potassio) capaci, entro un determinato tempo di eccitare il potere amilolitico della saliva, abolito dall'acido.

Questa supposizione trova appoggio nel fatto che, secondo nostre ricerche, piccole quantità di oleato di potassio, eccitano il potere amilolitico della saliva umana.

È l'amido dunque, tra le sostanze esaminate, quella che più fortemente protegge la ptialina, contro l'acido cloridrico.

Intorno a questa proprietà dell'amido, si possono, come già si disse, avanzare due ipotesi: o immaginare intimi rapporti tra amido ed enzima, o tra amido ed acido. Nel secondo caso si potrebbe avere una diminuzione di acidità, nel primo si potrebbe pensare ad una vera e propria difesa.

Poichè è noto che l'ovoalbumina, in presenza di HCl, forma una combinazione chimica a caratteri abbastanza definiti, se la ptialina fosse stata favorita, nella sua resistenza, contro l'acido cloridrico, da un'eventuale combinazione cloridrica con il sostrato, avrebbe dovuto per l'appunto nell'ovoalbumina trovare il mezzo più adatto; ugualmente si sarebbe dovuto verificare nel caso della fibrina di sangue di bue: invece tanto l'ovoalbumina, quanto

la fibrina si sono mostrate assolutamente inadatte alla protezione della ptialina contro l'acido.

A lato di questi fatti abbiamo che la fibrina di sangue di bue, l'olio di mandorle dolci, ecc. non fissano neppure lievi quantità di enzima, mentre è in grandi quantità fissato dall'amido, dal carbone animale e lievemente anche dalle ovoglobuline. Sembra dunque che fissare e proteggere l'enzima dall'acido sieno, nella stessa sostanza, due proprietà parallele; e *quindi parrebbe giustificato pensare che l'amido protegga la ptialina, perchè la fissi.*

Però la ptialina è soltanto labilmente fissata dall'amido crudo e dalla salda, giacchè, mediante ripetuti lavaggi, con acqua distillata, la si può in massima parte liberare (1).

Lo stesso fatto ho notato, mescolando saliva umana con carbone animale polverizzato.

È verosimile quindi che in questa proprietà dell'amido siano in giuoco soltanto fattori fisico-chimici, che si tratti cioè di semplice adsorbimento.

Matematica. — *Transformations qui conservent la composition.* Nota di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

1. J'ai précédemment montré l'intérêt que présentent, pour l'étude des fonctions permutables, certaines transformations qui conservent la composition (2). Ces transformations, que nous nommerons transformations Ω, peuvent être prises sous la forme

$$(1) \qquad G(x, y) = \lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi ; x, y)\, d\xi ,$$

ce que nous écrirons aussi

$$(1') \qquad G = \Omega(\lambda).$$

Elles font correspondre, à une fonction quelconque $\lambda(y - x)$ permutable avec l'unité, une fonction $G(x, y)$. Elles conservent la composition, c'est-à-dire que: *si* $G_1(x, y)$ *et* $G_2(x, y)$ *correspondent à* $\lambda_1(y - x)$ *et* $\lambda_2(y - x)$, $\overset{*}{G}_1 \overset{*}{G}_2$ *correspond à* $\overset{*}{\lambda}_1 \overset{*}{\lambda}_2$.

Une telle transformation fera correspondre, au groupe U des fonctions permutables avec l'unité, un groupe C de fonctions permutables entre elles.

(1) Ciò non si accorda con l'asserzione di L. Ambard a proposito dell'amilasi dell'orina, « *que l'amylase une fois fissée sur l'amidon cru y reste fissée, malgré tous les lavages* » (C. r. soc. biol., LXXXIII, 1458, 1920).

(2) Ann. Ec. Norm. Sup., 1919. Bull. Soc. Math. de France, 1919.

2. Les transformations précédentes étant déterminées, pour leurs applications (sur les quelles nous ne revenons pas), il est essentiel de résoudre la question suivante :

a) $F(x, y)$ étant une fonction donnée du premier ordre, réduite à la forme canonique, déterminer, s'il est possible, une Ω telle que $F = \Omega(1)$ (1).

3. L'expression générale du noyau $\Phi(\xi ; x, y)$ des transformations Ω qui conservent la composition contient une fonction arbitraire de deux variables. Elle peut être prise sous diverses formes.

Nous avons déjà indiqué que l'on peut, sous une restriction de dérivabilité (2), poser

$$(2) \qquad \Phi(\xi ; x, y) = \sum_{1}^{\infty p} \int_0^{\xi} d\xi_p \dots \int_0^{\xi_2} d\xi_1 \overset{*}{G}_{\xi_1} \overset{*}{G}_{\xi_2} \dots \overset{*}{G}_{\xi_p}(x, y - \xi)$$

avec

$$(2') \qquad G_{\xi}(x, y) = f(x + \xi, y + \xi)$$

f étant arbitraire.

Cette forme du noyau permet la résolution immédiate du problème *a*), dans le cas où la fonction donnée $F(x, y)$ admet une dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}$ finie et continue. Il existe alors un seul des noyaux précédents tel que

$$F = \Omega(1),$$

et on l'obtient immédiatement en posant

$$(2'') \qquad f = F'' - \overset{*}{F}'' \overset{*}{1} \overset{*}{F}'' - \overset{*}{F}'' \overset{*}{1} \overset{*}{F}'' \overset{*}{1} \overset{*}{F}'' - \dots$$

F'' désignant la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}$

4. Dans le cas précédent $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial x} \text{ finie et continue}\right)$, nous dirons la fonction $F(x, y)$ canonique *régulière*. On peut assurer que *toutes* les fonctions permutables avec elle sont données par l'expression $\Omega(\lambda)$ (3). La forme précédente du noyau $\Phi(\xi ; x, y)$ est la plus commode pour la représentation par une transformation Ω et pour l'étude du groupe des fonctions permutables avec une fonction canonique régulière.

(1) On voit immédiatement les modifications à apporter à cet énoncé lorsque $F(x, y)$ est d'ordre quelconque. La question *a*) est un cas particulier de la suivante, sur la quelle nous reviendrons : déterminer une transformation Ω telle que $F(x, y)$ appartienne au groupe C correspondant

(2) Loc. cit., Ann. Ec. Norm., pag. 41.

(3) Pour être sûr que l'on obtient ainsi *toutes* les fonctions permutables avec F il suffit de songer à l'arbitraire dont elles dépendent.

Dès que l'on cherche à passer à des cas plus généraux, il convient de voir si la formule (2) donne la forme la plus générale des noyaux $\Phi(\xi\,;x,y)$. Nous verrons que non et nous donnerons une expression tout à fait générale des noyaux Φ. Cette expression rendra intuitive la nature des transformations Ω. Dans le cas régulier, les formules obtenues semblent plus simples que les précédentes, mais on paye cette simplicité initiale au moment où l'on cherche à résoudre le problème *a*).

5. Nous emploierons une méthode indirecte. Donnons nous deux fonctions quelconques de x et de y, $m(x\,,y)$ et $n(x\,,y)$ vérifiant la relation

$$m + n + \overset{*}{m}\overset{*}{n} = 0$$

l'une étant connue, l'autre en résulte:

$$n = -m + \overset{*}{m}^2 - \overset{*}{m}^3 + \overset{*}{m}^4 - \cdots,$$

et l'on a, évidemment

$$(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{m})(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{n}) = (\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{n})(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{m}) = \overset{*}{1}^0. \tag{3}$$

Envisageons la transformation

$$G(x\,,y) = (\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{m})\,\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{n}) \tag{4}$$

λ étant fonction de $y - x$. Elle conserve la composition, car si l'on a

$$G_1 = (\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{m})\,\overset{*}{\lambda}_1(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{n}) \quad , \quad G_2 = (\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{m})\,\overset{*}{\lambda}_2(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{n}),$$

il en résulte, grâce à (3), $\overset{*}{G}_1\overset{*}{G}_2 = (\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{m})\,\overset{*}{\lambda}_1\overset{*}{\lambda}_2(\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{n})$. Elle est de la forme (1), comme on le constate par un calcul simple, et l'on trouve, comme valeur correspondante du noyau

$$\Phi(\xi\,;x\,,y) = n(x+\xi\,,y) + m(x\,,y-\xi) + \int_x^{y-\xi} m(x\,,\zeta)\,n(\zeta+\xi\,,y)\,d\zeta\,. \tag{5}$$

Nous allons voir que: *c'est là l'expression générale du noyau d'une transformation Ω conservant la composition.*

En effet nous avons déterminé précédemment [1] l'équation qui caractérise de tels noyaux. En remplaçant dans cette équation x par zéro et η par x, en posant enfin

$$\Phi(x\,;0\,,y) = n_0(x\,,y)$$

on en tire

$$\Phi(\xi\,;x\,,y) + \int_x^{y-\xi} n_0(x\,,\zeta)\,\Phi(\xi\,;\zeta\,,y)\,d\zeta = n_0(x+\xi\,,y) - n_0(x\,,y-\xi)$$

[1] Ann. Ec. Norm. équation (4).

d'où l'on déduit, en posant

$$m_0 = -\overset{*}{n}_0 + \overset{*}{\overset{*}{n}}_0 - \cdots,$$

$$(6) \qquad \Phi(\xi\,;x\,,y) = n_0(x+\xi\,.\,y) + m_0(x\,,y-\xi) + \\ + \int_x^{y-\xi} m_0(x\,,\zeta)\, n_0(\zeta+\xi\,,y)\, d\zeta\,,$$

qui a justement la forme (5). Les remarques du début de ce numéro permettent d'éviter la vérification, un peu longue, qu'une telle expression satisfait l'équation caractéristique des noyaux et nous sommes certains que (5), $m(x\,,y)$ étant arbitraire, donne tous les noyaux $\Phi(\xi\,;x\,,y)$.

Il résulte aussi de ce qui précède que des fonctions m différentes peuvent conduire au même noyau Φ, c'est-à-dire à la même transformation Ω: pour obtenir, par la formule (5), *tous* ces noyaux, on peut se borner à envisager les fonctions $m_0(x\,,y)$ nulles pour $x=0$. A chacune d'elles correspondra l'un des noyaux Φ, tel que

$$\Phi(\xi\,;0\,,y) = m_0(\xi\,,y)$$

et manifestement un seul.

Il est aisé de déterminer la forme générale des fonctions m et n qui conduisent *à un même noyau* Φ: m_0 et n_0 étant un couple de telles fonctions, la transformation correspondante est

$$\Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0)\,.$$

Soit m et n un autre couple conduisant à la même Ω; on peut toujours déterminer μ et ν telles que

$$(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)\,.\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mu}) \quad , \quad (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\nu})\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0)\,,$$

et il résulte de la formule (3) que l'on a alors: $\mu + \nu + \overset{*}{\mu}\,\overset{*}{\nu} = 0$. On doit avoir, quel que soit λ:

$$(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mu})\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\nu})\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0)\,,$$

d'où l'on tire aisément que ν et par conséquent μ doivent appartenir au groupe U. On obtient finalement, pour valeur générale de $n(x\,,y)$ (*conduisant à un noyau* Φ *déterminé*) l'expression

$$(7) \qquad n_0(x\,,y) + \nu(y-x) + \int_x^y \nu(\xi - x)\, n_0(\xi\,,y)\, d\xi\,,$$

$\nu(y-x)$ étant arbitraire; on a une formule analogue pour $m(x\,,y)$.

6. Examinons maintenant le problème *a*) du numéro 2. Etant donnée la fonction $F(x, y)$, tout revient à déterminer les fonctions n et m telles que

$$F = 1 + \overset{*}{m}\overset{*}{1} + \overset{*}{1}\overset{*}{n} + \overset{*}{m}\overset{*}{1}\overset{*}{n}. \tag{8}$$

Cette équation est de nature assez compliquée, tandis que en partant de la forme (2) du noyau, la résolution du problème *a*) était immédiate, en termes finis. On voit comment on perd ici, et au delà, tous les avantages de simplicité que (5) pouvait présenter sur (2).

Dans le cas où $F(x, y)$ est régulière, la résolution (en m et n) de (8) est naturellement possible: grâce à la formule (2) nous pouvons écrire immédiatement la valeur de la fonction $n(x, y)$ nulle pour $x = 0$. En nommant $n_0(x, y)$ cette fonction, il vient

$$n_0(x, y) = \Phi(x; 0, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_p \int_0^x d\xi_p \cdots \int_0^{\xi_2} d\xi_1 \overset{*}{G}_{\xi_1} \overset{*}{G}_{\xi_2} \cdots \overset{*}{G}_{\xi_p}(0, y - x),$$

en tenant compte de (2′) et de (2″). La formule (7) donne alors la valeur la plus générale de n et celle de m en résulte. *Toutes les fonctions permutables avec* $F(x, y)$ *auront alors l'expression* (4).

Les transformations Ω telles que $F = \Omega(1)$ soit régulière, cest-à-dire celles qui peuvent prendre la forme (2), *sont caractérisées* par ce fait que

$$\frac{d}{dx} n(x, x + y)$$

existe et est continue (ce qui entraine la même condition avec m) [1]. Ce ne sont donc pas *les plus générales* Ω qui conservent la composition: en d'autres termes la formule (5) est un peu plus générale que (2). C'est là son véritable intérêt; nous reviendrons sur ce point dans une note prochaine.

[1] C'est, en tenant compte de (7), le résultat même du Théorème du n. 13 de mon Mémoire cité (Bull. Soc. Math. 1919). Ce théorème se trouve généralisé dans ce qui précède (n. 5), mais l'enoncé plus restreint garde son intérêt, parce qu'il caractérise le cas régulier.

G. C.